1. [12] **א)** [4] הנגזרת של הפונקציה $y(x)$ מורכבת משני מחוברים כך שהראשון מהם פרופורציוני ל- x ופרופורציוני הפוך ל- y ואילו המחובר השני פרופורציוני ל- y ופרופורציוני הפוך ל- x, אזי המשוואה הדיפרנציאלית המתארת את הפונקציה הזו היא:

1) משוואת פרידה
2) משוואה ליניארית
3) משוואת ברנולי
4) $\boxed{\text{משוואה הומוגנית}}$
5) אף אחד מן הסוגים הנ"ל

ב) [8] נניח שכל מקדמי הפרופורציוניות בסעיף **א'** שווים ל- 1 ובנוסף $y(1) = \sqrt{2}$, אזי $y(e)$ שווה ל-

$$2e^2 \qquad e^2 \qquad \boxed{2e} \qquad e \qquad 1$$

2. [12] **א)** [5] יהא $\mu(x,y)$ גורם אינטגרציה של המשוואה $y\sin 2x\,dx - (\sin^2 x - y^2)\,dy = 0$ ויהיו μ'_y, μ'_x הנגזרות של $\mu(x,y)$ לפי x ולפי y בהתאמה, אז

1) $\mu'_x = \mu'_y = 0$ לכל (x,y)
2) $\boxed{\mu'_x = 0,\ \mu'_y \neq 0 \text{ לכל } (x,y)}$
3) $\mu'_y = 0,\ \mu'_x \neq 0$ לכל (x,y)
4) $\mu'_x = 0$ לכל (x,y), $\mu'_y = 0$ רק כאשר $y = 1$
5) $\mu'_y = 0$ לכל (x,y), $\mu'_x = 0$ רק כאשר $x = 1$

ב) [7] מצא את הפתרון $y = y(x)$ של המשוואה הנ"ל העובר דרך הנקודה $(0,1)$:

$$y = \boxed{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \sin^2 x}}$$

3. [12] **א)** [6] רשום פתרון כללי של המשוואה $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$

$$y = \boxed{C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + C_3 x \sin 2x + C_4 x \cos 2x}$$

ב) [6] מצא את צורת הפתרון הפרטי של המשוואה $y^{(4)} + 8y'' + 16y = x(1 - \sin 2x)$ בשיטת השוואת המקדמים (ללא חישוב המקדמים האלה)

$$y = \boxed{Ax + B + (Cx^3 + Dx^2)\cos 2x + (Ex^3 + Fx^2)\sin 2x}$$

4. [12] **א)** [5] יהא $y(x)$ פתרון של המשוואה $x^2y''+7xy'+18y=0$ ותהא $f(x)$ פונקציה כך שהמכפלה $y(x)f(x)$ חסומה לכל פתרון $y(x)$ על הקטע $(0,\infty)$. אז $f(x)$ יכולה להיות

1 $\quad x \quad e^x \quad \boxed{x^3} \quad e^{3x} \quad f(x)$ לא קיימת

ב) [7] מצא פתרון פרטי של המשוואה הנ"ל בתנאי התחלה $y(1)=1,\ y'(1)=0$

$$y=\boxed{x^{-3}[\cos(3\ln x)+\sin(3\ln x)]}$$

5. [14] **א)** [3] תהא A מטריצה של קבועים מסדר $n\times n$. מצא את הסדר המינימלי n של המערכת $X'(t)=AX(t)$ אם ידוע שיש לה ארבעה פתרונות (שונים מאפס) כך שאחד מהם חסום על כל ציר t, השני חסום על $(0,\infty)$ אך לא חסום על $(-\infty,0)$, השלישי חסום על $(-\infty,0)$ אך לא חסום על $(0,\infty)$, ולבסוף, הרביעי לא חסום על $(0,\infty)$ ולא חסום על $(-\infty,0)$.

$9 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad \boxed{3}$

ב) [4] תן דוגמה של מטריצה A המקיימת את כל התנאים של סעיף **א**' וכך שכל איבריה שווים רק ל- 0 או 1

תשובה לדוגמה (הכי פשוטה):

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ג) [7] למערכת עם מטריצה A שלך רשום ארבעה פתרונות אשר מקיימים את התנאים של סעיף **א**'

$$X^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad X^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^t,\quad X^{(3)}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}e^{-t},\quad X^{(4)}=X^{(2)}+X^{(3)}$$

6. [12] נתונה המערכת $X'=AX$ כאשר A מטריצה 5×5 ממשית קבועה, בעלת ערכים עצמיים $-2,\ 1\pm 3i,\ \pm i$. אזי בין הפתרונות הלא טריוויאליים שלה (שונים מאפס):

1) קיים פתרון שלא חסום על $(-\infty,0)$ ולא חסום על $(0,\infty)$ $\quad \boxed{\text{כן}} \quad$ **לא**

2) קיים פתרון מחזורי עם המחזור קטן מ- 2π $\quad$ כן $\quad \boxed{\text{לא}}$

3) קיים פתרון $X(t)$ כך ש- $X''(t)+X(t)=0$ לכל t $\boxed{\text{כן}}$ **לא**

4) קיים פתרון $X(t)$ כך ש- $X''(t)-X(t)=0$ לכל t כן $\boxed{\text{לא}}$

5) קיים פתרון העובר דרך הראשית וכך שכל קואורדינטה שלו היא פונקציה מונוטונית על הקטע $(-\infty,\infty)$ כן $\boxed{\text{לא}}$

6) בפולינום אופייני $\det(A-\lambda I)$ יש כל החזקות של λ מאפס עד 5 כן $\boxed{\text{לא}}$

7. [14] למשוואה $y''-2xy'+6y=0$ קיים פתרון מהצורה $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

א) [5] נוסחת הנסיגה (רקוקסיה) היא

$$a_{n+2}=\boxed{\frac{2n-6}{(n+1)(n+2)}}a_n$$

ב) [5] איזה תנאי התחלה $y(0),y'(0)$ צריך לבחור כדי ש- $y(x)$ יהיה פולינום? מהי המעלה m של הפולינום הזה?

$$\boxed{y(0)=0,\quad y'(0)=1,\qquad m=3}$$

ג) [4] רשום את הפולינום המתאים לתנאים הנ"ל

$$y(x)=\boxed{x-\frac{2}{3}x^3}$$

8. [12] יהי $y(x)$ פתרון של המשוואה $y'=\frac{x}{4y}+(2y-\sqrt{x^2+1})(2y-x)$ עם תנאי התחלה $y(0)=y_0$ כאשר $0<y_0<\frac{1}{2}$.

תשובה: $\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\frac{1}{2}}$

הערה: השתמש באי-שיוויון $\frac{1}{2}x<y<\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$ ובכלל הסנדוויץ'